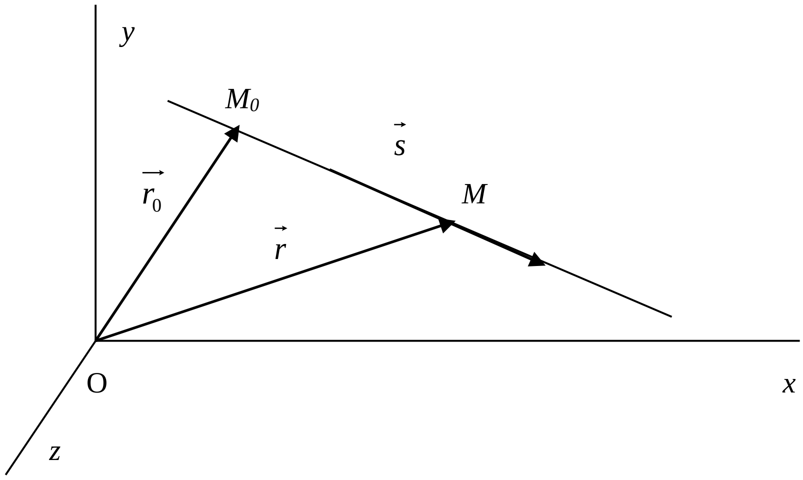
PRAVA U PROSTORU

Prava kao geometrijski objekat u prostoru može biti određena na više načina.

- Prava je određena pomoću jedne tačke i vektora čiji je nosač ta prava. Za taj vektor kažemo da je vektor pravca prave. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ je data tačka sa prave *p*, a $\vec{s} = (m, n, l)$ vektor pravca prave *p*. Neka je $M(x, y, z)$ proizvoljna tačka prave *p*.



Neka su $\vec{r_0}$ i $\vec{r}$ radijus vektori redom tačaka M_0 i M. Vektori $\overrightarrow{M_0M}$ i $\vec{s}$ su kolinearni, pa iz uslova kolinearnosti imamo da je $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{s}, \quad t \in R \quad \Rightarrow \quad \vec{r} - \vec{r_0} = t \cdot \vec{s}, \quad t \in R$.

Dakle, $\vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{s}, \quad t \in R$ je **vektorska jednačina prave *p***.

Prelaskom na koordinate dobijamo $p: \begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tl \end{cases}$ - **parametarska jednačina prave *p***.

Eliminacijom parametra t iz gornjeg sistema dobijamo *p*: $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{l}$ - **kanonska jednačina prave *p***.

- Prava je određena sa dvije date tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Označimo tu pravu sa *p*. Tada je vektor pravca prave *p* vektor $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Neka je $M(x, y, z)$ proizvoljna tačka prave *p*, tada je kanonska jednačina prave *p*: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$. Dakle, **jednačina prave kroz dvije tačke** je *p*: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

- Prava je određena kao presjek dvije ravni $p: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ - **opšta jednačina prave**. Pri tome se podrazumijeva da normalni vektori $\vec{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ i $\vec{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ tih ravni nijesu kolinearni.

Ako je jednačina prave data u kanonskom obliku tada imamo direktnu informaciju o koordinatama vektora pravca te prave i koordinatama tačke kroz koju prava prolazi. Postavlja se pitanje kako iz opšte jednačine prave preći na njen kanonski oblik. Neka je $p:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$, tada vektor pravca prave p zadovoljava uslove $\vec{s}\perp\vec{n_1} \quad \wedge \quad \vec{s}\perp\vec{n_2}$, pa je $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$. Koordinate proizvoljne tačke prave p koja je data opštom jednačinom određujemo tako što jednu koordinatu uzmemo proizvoljno, a preostale dvije koordinate izračunamo iz sistema jednačina $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$.

Primjer 1. Napisati jednačinu prave $p:\begin{cases} x-4y-z-5=0 \\ 3x+y-16z-2=0 \end{cases}$ u kanonskom obliku.

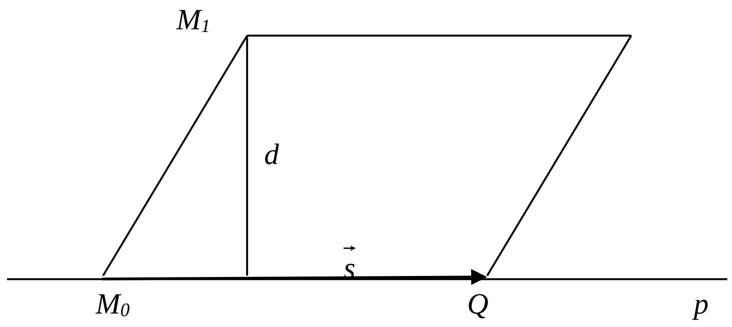
Normalni vektori datih ravni su $\vec{n_1}=(1,-4,-1)$, $\vec{n_2}=(3,1,-16)$, a vektor pravca prave p zadovoljava uslove $\vec{s}\perp\vec{n_1} \quad \wedge \quad \vec{s}\perp\vec{n_2} \quad \Rightarrow \vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=(65,13,13)$. Da bi našli jednu tačku prave p možemo uzeti da je npr. $y=0$. Otuda imamo sljedeći sistem $\begin{cases} x-z=5 \\ 3x-16z=2 \end{cases}$. Rješavanjem ovog sistema dobijamo $x=6,\ z=1$. Tražena tačka prave p je $M_0(6,0,1)$. Dakle, kanonski oblik jednačine prave p je: $\frac{x-6}{65}=\frac{y-0}{13}=\frac{z-1}{13}$.

Neka su date prave $p_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{l_1}$ i $p_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{l_2}$.

- Ugao između pravih p_1 i p_2 je ugao između njihovih vektora pravaca. Označimo taj ugao sa φ, tada je $\cos\varphi=\frac{\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}}{|\vec{s_1}|\cdot|\vec{s_2}|}=\frac{m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+l_1\cdot l_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+l_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+l_2^2}}$.
- $p_1 \parallel p_2$ (prave su paralelne)
  $\Leftrightarrow \quad \vec{s_1}=\lambda\cdot\vec{s_2},\ \lambda\in R \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{l_1}{l_2}=\lambda$.
- $p_1\perp p_2$ (prave su normalne)
  $\Leftrightarrow \quad \vec{s_1}\cdot\vec{s_2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+l_1\cdot l_2=0$.
- $p_1\cap p_2\neq\emptyset$ (prave se sijeku) $\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\vec{s_1}\times\vec{s_2})=0$, gdje su $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{s_1}=(m_1,n_1,l_1)$, $\vec{s_2}=(m_2,n_2,l_2)$.
- $p_1\equiv p_2$ (prave se poklapaju)
  $\Leftrightarrow \quad \vec{s_1}=\lambda\cdot\vec{s_2} \quad \wedge \quad \overrightarrow{M_1M_2}=k\cdot\vec{s_1}, \quad \lambda,k\in R$.
- prave p_1 i p_2 su mimoilazne ako se ne poklapaju, ne sijeku se i nijesu paralelne.

RASTOJANJE TAČKE OD PRAVE

Za datu pravu $p: \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{l}$ i tačku $M_1(x_1, y_1, z_1)$ van prave *p*, može se postaviti pitanje određivanja rastojanja te tačke od prave.



Neka je $\overrightarrow{M_0Q} = \vec{s}$. Označimo sa *d* rastojanje tačke *M₁* od prave *p*, a sa P površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{s}$ i $\overrightarrow{M_0M_1}$.

Tada je $\left.\begin{aligned} P &= \left|\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right| \\ P &= \left|\vec{s}\right| \cdot d \end{aligned}\right\} \Rightarrow d = \dfrac{\left|\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right|}{\left|\vec{s}\right|}$.

Dakle, $d(M_1, p) = \dfrac{\left|\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right|}{\left|\vec{s}\right|}$ **- rastojanje tačke *M₁* od prave *p*.**

RASTOJANJE IZMEĐU MIMOILAZNIH PRAVIH

Neka su $p_1: \dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1} = \dfrac{z-z_1}{l_1}$ i $p_2: \dfrac{x-x_2}{m_2} = \dfrac{y-y_2}{n_2} = \dfrac{z-z_2}{l_2}$ mimoilazne prave. Tada je $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{s_1} = (m_1, n_1, l_1)$, $\overrightarrow{s_2} = (m_2, n_2, l_2)$. Rastojanje između mimoilaznih pravih p_1 i p_2 je visina paralelopipeda konstruisanog nad vektorima $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{s_1}$ i $\overrightarrow{s_2}$ i računa se po formuli $d(p_1, p_2) = \dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2})\right|}{\left|\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}\right|}$.

Primjer 2. Napisati jednačinu prave u parametarskom obliku koja sadrži tačku $M_0(3,-2,1)$ i ima vektor pravca $\vec{s} = (-1,3,2)$.

Kanonski oblik jednačine tražene prave je $p: \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{l}$, tj $p: \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{2}$. Jednačina ove prave u parametarskom obliku je $p: \begin{cases} x = 3-t \\ y = -2+3t \\ z = 1+2t \end{cases}, \ t \in R$.

Primjer 3. Napisati jednačinu prave koja sadrži tačke $M_1(-1,2,0)$ i $M_2(2,3,-1)$.

Jednačina prave kroz dvije tačke je $p: \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$, tj. $p: \dfrac{x+1}{2+1} = \dfrac{y-2}{3-2} = \dfrac{z-0}{-1-0}$, tj. $p: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{-1}$. Parametarska jednačina tražene prave je $p: \begin{cases} x = -1+3t \\ y = 2+t \\ z = -t \end{cases}, \ t \in R$.

Primjer 4. Napisati jednačinu prave $p: \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2y-z-2=0 \end{cases}$ u parametarskom obliku.

Prava je zadata kao presjek dvije ravni. Da bismo napisali jednačinu prave u kanonskom obliku potrebno je znati vektor pravca prave i jednu tačku sa te prave. Normalni vektori datih ravni su $\overrightarrow{n_1} = (1,1,0)$ i $\overrightarrow{n_2} = (0,2,-1)$. Vektor pravca prave zadovoljava uslove $\vec{s} \perp \overrightarrow{n_1} \ \wedge \ \vec{s} \perp \overrightarrow{n_2}$, pa je $\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1,1,2)$. Tačku sa prave ćemo odrediti na sljedeći način. Neka je npr. *z=0*, tada rješavajući sistem $\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2y-2=0 \end{cases}$ dobijamo $y=1 \wedge x=0$. Dakle, dobili smo tačku $M_0(0,1,0)$. Kanonski oblik jednačine date prave je $p: \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{l}$, tj. $p: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$. Prelaskom na parametarski oblik dobijamo $p: \begin{cases} x = -t \\ y = 1+t \\ z = 2t \end{cases}, \ t \in R$.

Primjer 5. Naći ugao između pravih $p_1: \dfrac{x-5}{7} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-6}{-8}$ i $p_2: \dfrac{x-2}{11} = \dfrac{y-4}{-8} = \dfrac{z+1}{-7}$.

Ugao između pravih je ugao između njihovih vektora pravaca. Označimo taj ugao sa φ, tada je

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}}{|\overrightarrow{s_1}| \cdot |\overrightarrow{s_2}|} = \frac{(7,2,-8)\cdot(11,-8,-7)}{\sqrt{7^2+2^2+(-8)^2} \cdot \sqrt{11^2+(-8)^2+(-7)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 45^\circ .$$

Primjer 6. Date su prave $p_1: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{a} = \dfrac{z}{-3}$ i $p_2: \dfrac{x}{4} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{-12a}$. Odrediti vrijednost parametra a tako da prave p_1 i p_2 budu: **a)** normalne, **b)** paralelne.

a) Prave p_1 i p_2 su normalne

$\Leftrightarrow \quad \vec{s_1} \cdot \vec{s_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 m_2 + n_1 n_2 + l_1 l_2 = 0$, tj. $-8 + a + 36a = 0$. Odavde dobijamo da je $a = \dfrac{8}{37}$.

b) Prave p_1 i p_2 su paralelne $\Leftrightarrow \quad \vec{s_1} = \lambda \cdot \vec{s_2} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{l_1}{l_2}$, tj $\dfrac{-2}{4} = \dfrac{a}{1} = \dfrac{-3}{-12a}$. Odavde dobijamo da je $a = -\dfrac{1}{2}$.

Primjer 7. Ispitati da li se prave $p_1 : \dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{1}$ i $p_2 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-5}{4}$ sijeku.

Iz jednačina pravih p_1 i p_2 slijedi da je $M_1(6,-1,0),\ \vec{s_1} = (3,-2,1),\ M_2(1,7,5),\ \vec{s_2} = (2,1,4)$. Kako je $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\vec{s_1} \times \vec{s_2}) = \begin{vmatrix} -5 & 8 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, tj. prave p_1 i p_2 se sijeku.

Primjer 8. Naći rastojanje tačke $M_1(-5,4,3)$ od prave $p : \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-1}{2}$.

Iz jednačine prave *p* imamo da je $M_0(2,3,1),\ \vec{s} = (-1,3,2)$. Rastojanje tačke M_1 od prave *p* računamo po formuli $d(M_1, p) = \dfrac{\left|\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right|}{\left|\vec{s}\right|}$. Kako je $\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ -7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (4,-12,20)$ to je

$$d(M_1, p) = \frac{\left|\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right|}{\left|\vec{s}\right|} = \frac{\sqrt{4^2 + (-12)^2 + 20^2}}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{4\sqrt{35}}{\sqrt{14}} = 2\sqrt{10}.$$

Primjer 9. Naći rastojanje između pravih $p_1 : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z}{2}$ i $p_2 : \dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-3}{2}$.

Primijetimo da su prave p_1 i p_2 paralelne, pa rastojanje između paralelnih pravih računamo kao rastojanje proizvoljne tačke sa jedne prave od druge prave. Iz jednačina pravih p_1 i p_2 slijedi da je $M_1(2,-1,0),\ M_2(7,1,3),\ \vec{s_2} = (3,4,2)$ Tada je:

$$d(p_1, p_2) = d(M_1, p_2) = \frac{\left|\overrightarrow{M_2M_1} \times \vec{s_2}\right|}{\left|\vec{s_2}\right|}.$$

Kako je $\overrightarrow{M_2M_1} \times \vec{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (8,1,-14)$, to je

$$d(p_1, p_2) = \frac{\sqrt{8^2 + 1^2 + (-14)^2}}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{261}}{\sqrt{29}} = 3.$$

Primjer 10. Naći rastojanje između pravih $p_1 : \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}$ i $p_2 : \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}$.

Iz jednačina pravih p_1 i p_2 slijedi da je $M_1(-7,-4,-3), M_2(21,-5,2), \overrightarrow{s_1} = (3,4,-2)$, $\overrightarrow{s_2} = (6,-4,-1)$. Kako je $\overrightarrow{s_1} \neq \lambda \cdot \overrightarrow{s_2} \quad \wedge \quad \overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}) \neq 0$, to su prave p_1 i p_2 mimoilazne, pa se rastojanje između njih računa po formuli $d(p_1, p_2) = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2})\right|}{\left|\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}\right|}$, kako je

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}) = \begin{vmatrix} 28 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -507, \text{ a}$$

$$\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = (-12, -9, -36) \text{, to je}$$

$$d(p_1, p_2) = \frac{|-507|}{\sqrt{(-12)^2 + (-9)^2 + (-36)^2}} = \frac{507}{39} = 13.$$

Primjer 11. Naći tačku presjeka pravih $p_1 : \frac{x+5}{-3} = \frac{y-14}{6} = \frac{z+3}{2}$ i $p_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+1}{6}$.

Napišimo jednačine datih pravih u parametarskom obliku $p_1 : \begin{cases} x = -5 - 3t \\ y = 14 + 6t, \quad t \in R, \\ z = -3 + 2t \end{cases}$

$p_2 : \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = -1 - 3k, \\ z = -1 + 6k \end{cases}$ $k \in R$. Za svako konkretno t odnosno k dobija se po jedna tačka sa prave p_1 odnosno prave p_2. Odredimo vrijednosti parametara t i k tako da se radi o istoj tački.

Dakle, treba riješiti sistem jednačina $\begin{cases} -5 - 3t = 3 + 2k \\ 14 + 6t = -1 - 3k \\ -3 + 2t = -1 + 6k \end{cases}$, tj. $\begin{cases} 2k + 3t + 8 = 0 \\ -3k - 6t - 15 = 0 \\ 6k - 2t + 2 = 0 \end{cases}$. Ovaj sistem ima jedinstveno rješenje $k = -1 \quad \wedge \quad t = -2$. Zamjenom $k = -1$ u parametarski oblik jednačine prave p_2 ili zamjenom $t = -2$ u parametarski oblik jednačine prave p_1, dobijamo presječnu tačku pravih p_1 i p_2 i to $P(1,2,-7)$.